第 29 講　二項分布

§1　二項分布

要点整理 と 公式

要点 ①　二項分布

1 回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返す反復試行において，事象 A がちょうど r 回起こる確率は

$$_{n}\mathrm{C}_{r}\,p^{r}(1-p)^{n-r}$$

であり，$1-p=q$ とおくと , この確率は

$$_{n}\mathrm{C}_{r}\,p^{r}q^{n-r}\quad (p+q=1)$$

と表される。

この反復試行において，事象 A の起こる回数を X とすると，X は 0，1，……，n の値をとる確率変数であり，$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)={}_{n}\mathrm{C}_{r}\,p^{r}q^{n-r}\quad (r=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$$

である。よって，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	……	r	……	n	計
P	$_{n}\mathrm{C}\ \ p\ \ q$	$_{n}\mathrm{C}\ \ p\ \ q$	……	$_{n}\mathrm{C}\ \ p\ \ q$	……	$_{n}\mathrm{C}\ \ p\ \ q$	1

この表で与えられる確率分布を「　　　　　　」という。二項分布は n と p の値によって定まり，　　　で表す。またこのとき，確率変数 X は二項分布 $B(n,\ p)$ に「　　　」という。

※$X=0$，1，……，r，……，n のときの確率の総和は，二項定理より

$$_{n}\mathrm{C}_{0}\,p^{0}q^{n}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}\,p^{1}q^{n-1}+\cdots\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{r}\,p^{r}q^{n-r}+\cdots\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}\,p^{n}q^{0}=(p+q)^{n}=1^{n}=1$$

であることが確認できる。

例　1 個のさいころを 3 回投げるとき，2 以下の目が出る回数を X とする。

1 回の試行で 2 以下の目が出る確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

この試行を 3 回繰り返すから，X は二項分布 $B\left(3,\ \dfrac{1}{3}\right)$ に従う。

よって，$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)=\ \ \mathrm{C}\ \ \left(\quad\right)\left(\quad\right)\qquad (r=\qquad\qquad)$$

であり

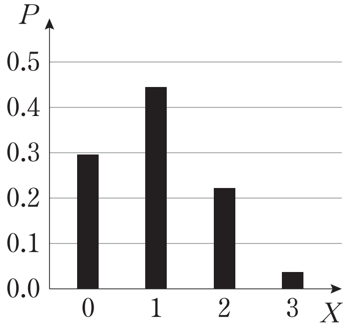
$$P(X=0)={}_3\mathrm{C}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27},\qquad P(X=1)={}_3\mathrm{C}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{12}{27},$$

$$P(X=2)={}_3\mathrm{C}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{6}{27},\qquad P(X=3)={}_3\mathrm{C}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{27}$$

であるから，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$	1

また，この確率分布をグラフで表すと右のようになる。



1　1 枚の硬貨を 4 回投げるとき，表が出る回数を X とする。

(1)　X はどのような二項分布に従うか。$B(n,\ p)$ の形で答えよ。

(2)　X の確率分布を求めよ。

Point Pickup

二項分布 $B(n,\ p)$

1回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返す反復試行において，A の起こる回数を X とすると，X は確率変数で，その確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	……	r	……	n	計
P	${}_n\mathrm{C}_0\,p^0q^n$	${}_n\mathrm{C}_1\,p^1q^{n-1}$	……	${}_n\mathrm{C}_r\,p^rq^{n-r}$	……	${}_n\mathrm{C}_n\,p^nq^0$	1

この表で与えられる確率分布を「二項分布」といい，$B(n,\ p)$ で表す。

また，確率変数 X は二項分布 $B(n,\ p)$ に従う，という。

[MEMO]

§2 二項分布の期待値，分散，標準偏差

要点整理 と 公式

要点 ① 二項分布の期待値，分散，標準偏差

1 回の試行で事象 A が起こる確率が p である試行を n 回繰り返す反復試行において，事象 A が起こる回数を X とすると，X は二項分布　　　　に従う。この二項分布の期待値，分散を求める。

1 回目，2 回目，……，n 回目に

事象 A が起これば　，起こらなければ

の値をとる確率変数をそれぞれ X_1，X_2，……，X_n とすると，

$X=$

と表される。よって，X の期待値は

$$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_n)$$

ここで，確率変数 X_k ($k=1$，2，……，n)の確率分布は右の表のようになる。ただし，$p+q=1$ である。よって，

X_k	0	1	計
P	q	p	1

$$E(X_k)=0\cdot q+1\cdot p=$$

である。

したがって，X の期待値は

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_n)=\quad+\quad+\cdots\cdots+\quad=$$

また，確率変数 X_1，X_2，……，X_n は互いに独立であるから，X の分散は

$$V(X)=V(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots\cdots+V(X_n)$$

$E\left(X_k{}^2\right)=0^2\cdot q+1^2\cdot p=$　より

$$V(X_k)=E\left(X_k{}^2\right)-\{E(X_k)\}^2=\quad-\quad{}^2=p(1-p)=$$

よって，X の分散は

$$V(X)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots\cdots+V(X_n)=\quad+\quad+\cdots\cdots+\quad=$$

以上より，次のことが成り立つ。

二項分布の期待値，分散，標準偏差

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると

期待値 $E(X)=np$,　　分散 $V(X)=npq$,　　標準偏差 $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

例 1枚の硬貨を10回投げるとき，表が出る回数を X とする。X の期待値と標準偏差を求める。

X は二項分布 　　　　 に従うので

期待値 $E(X)=$ 　　　 $=5$

分散 $V(X)=$ 　　　　　　 $=\dfrac{5}{2}$

標準偏差 $\sigma(X)=$ 　　 $=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

2 1 個のさいころを 300 回投げるとき，6 の目が出る回数を X とする。

(1) X の期待値を求めよ。

(2) X の分散を求めよ。

(3) X の標準偏差を求めよ。

Point Pickup

二項分布の期待値，分散，標準偏差

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると

期待値　$E(X)=np$

分散　$V(X)=npq$

標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

[MEMO]

第 29 講　確認テスト

1　1 から 4 までの数が 1 つずつ書かれた 4 個の球が袋の中に入っている。この中から 1 個取り出す試行を 3 回行う。ただし，取り出した球はもとに戻すものとする。1 が書かれた球を取り出した回数を X とするとき, 次の問いに答えよ。

(1)　X はどのような二項分布に従うか。答えは，下の①～④のうちから選べ。 ア

①　$B\left(3,\ \dfrac{3}{4}\right)$　　②　$B\left(4,\ \dfrac{1}{3}\right)$

③　$B\left(3,\ \dfrac{1}{4}\right)$　　④　$B\left(\dfrac{1}{4},\ 3\right)$

(2)　X の確率分布を求めよ。

X	0	1	2	3	計
P	$\dfrac{\boxed{イウ}}{64}$	$\dfrac{\boxed{エオ}}{64}$	$\dfrac{\boxed{カ}}{64}$	$\dfrac{\boxed{キ}}{64}$	1

2　1 個のさいころを 400 回投げるとき，偶数の目が出る回数を X とする。次の問いに答えよ。

(1)　X の期待値を求めよ。答えは，下の①～④のうちから選べ。

$E(X)=$ ク

①　50　　②　100

③　200　　④　400

(2)　X の分散と標準偏差を求めよ。答えは，下の①～⑨のうちから選べ。

$V(X)=$ ケ ，$\sigma(X)=$ コ

①　5　　②　10　　③　20

④　25　　⑤　50　　⑥　100

⑦　200　　⑧　400　　⑨　1600

[MEMO]

第 29 講　二項分布

§1 二項分布

1　1 枚の硬貨を 4 回投げるとき，表が出る回数を X とする。

(1)　X はどのような二項分布に従うか。$B(n,\ p)$ の形で答えよ。

(2)　X の確率分布を求めよ。

[解答]

(1)　1 回の試行で表が出る確率は $\dfrac{1}{2}$

この試行を 4 回繰り返すから，X は二項分布 $B\left(4,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う。

(2)　$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)={}_4\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{4-r}\quad (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

であり

$$P(X=0)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16},\qquad P(X=1)={}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{16},$$

$$P(X=2)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16},\qquad P(X=3)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{4}{16},$$

$$P(X=4)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{16}$$

であるから，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

§2 二項分布の期待値，分散，標準偏差

2 1 個のさいころを 300 回投げるとき，6 の目が出る回数を X とする。

(1) X の期待値を求めよ。

(2) X の分散を求めよ。

(3) X の標準偏差を求めよ。

[解答]

X は二項分布 $B\left(300,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従う。

(1) $E(X)=300\cdot\dfrac{1}{6}=50$

(2) $V(X)=300\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\left(1-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{125}{3}$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{125}{3}}=\dfrac{5\sqrt{15}}{3}$

第29講　確認テスト 解答

1

(1)　**[正解]** ア：③

[解説]

1 回の試行で 1 が書かれた球を取り出す確率は $\frac{1}{4}$

この試行を 3 回繰り返すから，X は二項分布

$B\left(3,\ \frac{1}{4}\right)$ に従う。 [A]

[A]　1 回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返す反復試行において，A の起こる回数を X とすると，X は確率変数で，二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。

(2)　**[正解]** イウ：27，エオ：27，カ：9，キ：1

[解説]

X は二項分布 $B\left(3,\ \frac{1}{4}\right)$ に従う。

$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)={}_3\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{3-r}$$ [B]

$$(r=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

であり

$$P(X=0)={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$$

$$P(X=1)={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$$

$$P(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{9}{64}$$

$$P(X=3)={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{64}$$

であるから，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$	1

[B]　二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X について，$X=r$ となる確率は，反復試行の確率の式より

$$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r\,p^r\,(1-p)^{n-r}$$

$$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

2

(1)　**[正解] ク：③**

[解説]

さいころを 1 回投げて偶数の目が出る確率は

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

この試行を 400 回繰り返すから，X は二項分布

$B\left(400,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う。

よって

$$E(X)=400\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{200}$$ [C]

[C]　確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき
　期待値　$E(X)=np$

(2)　**[正解] ケ：⑥，コ：②**

[解説]

X は二項分布 $B\left(400,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う。

よって

$$V(X)=400\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\mathbf{100}$$ [D]

$$\sigma(X)=\sqrt{100}=\mathbf{10}$$

[D]　確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると
　分散　$V(X)=npq$
　標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{npq}$